

USOS DEL PROGRAMA MINIMAT

(GUÍA N° 003)

Solución aproximada de ecuaciones y desigualdades de una variable

Se trata de obtener la solución aproximada de una ecuación o de una desigualdad utilizando el programa **Minimat**, aplicando el método de aproximaciones sucesivas. La ecuación o desigualdad debe tener una sola variable o incógnita.

I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

En este caso hay que recordar que una ecuación es un enunciado en el que se establece que las dos expresiones matemáticas son iguales.

Ecuación	Ecuación Equivalente	Formato funcional
$A = \pm B$	$A \mp B = 0$	$f(x) = A \mp B$
$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} = \frac{5}{4}$	$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} = 0$	$f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$

En la tabla anterior se muestra la ecuación $A = \pm B$ y su forma equivalente $A \mp B = 0$, esto quiere decir ambas tienen exactamente las mismas soluciones. Resolver $A \mp B = 0$ equivale a hallar el valor que toma la variable en el punto donde la gráfica de la ecuación corta el eje horizontal. Una ecuación puede tener una, ninguna o varias soluciones.

El formato funcional $f(x) = A \mp B$ permite tabular y graficar la expresión en un intervalo determinado. Luego se analizan los resultados y se toman las decisiones pertinentes. El formato funcional se utiliza en el programa **Minimat** para localizar visualmente los intervalos en que la gráfica de la expresión corta el eje horizontal, esto quiere decir que alrededor de dichos puntos los valores de la expresión cambian de signo, pasan de positivo (+) a negativo (-) o de negativo (-) a positivo (+).

Luego si $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signo diferente y la gráfica corta el eje horizontal en el intervalo $[x_1, x_2]$, todo valor x tal que $x_1 \leq x \leq x_2$ es una raíz aproximada de la ecuación.

MÉTODO DE LA BISECCIÓN PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

Para hallar una solución aproximada de una ecuación de una variable utilizando **Minimat**, siguiendo los lineamientos descritos anteriormente, se realizan los siguientes pasos:

1. Tabular y trazar la gráfica de la expresión, tratando de localizar visualmente los puntos en donde la gráfica corta el eje horizontal (solución).
2. Seleccionar el intervalo $[a, b]$ donde la gráfica corta el eje horizontal.

3. Presionar el **Botón: Ceros** para calcular el cero correspondiente al intervalo seleccionado.

Botón: Ceros

The screenshot shows a software interface for finding roots. It has a title bar 'Raiz de la expresión en el intervalo [a,b]'. Below the title bar, there is a section 'Expresión' with a text box containing 'f(x)= (expresión en x)'. Below that is a section 'Extremos del intervalo' with two text boxes labeled 'a' and 'b'. Below that is a section 'Raiz o Cero' with a larger text box. At the bottom, there is a small numeric input field showing '6' and a 'Resolver' button.

4. Una vez presionado el **Botón: Ceros**, se digitan los extremos de cada intervalo y, luego se presiona el **Botón: Resolver**, para obtener la solución.

EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Encuentre las soluciones (raíces o ceros) de

$$-3x^3 + 5x = -3$$

Solución.

Procedemos a organizar la información para poder obtener las soluciones aproximadas utilizando **Minimat**.

Paso 1

$$\text{sea } f(x) = -3x^3 + 5x + 3$$

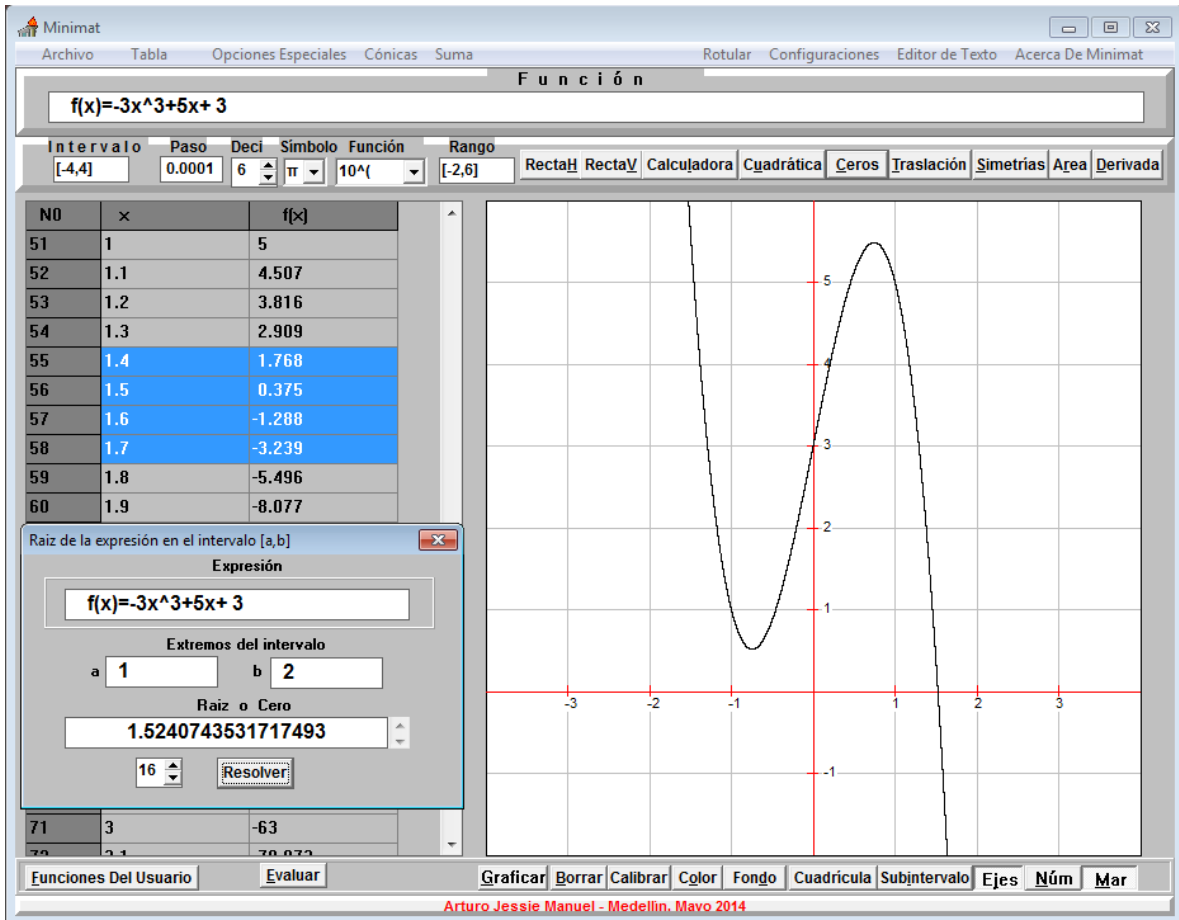
el formato funcional de la ecuación dada, fijemos los siguientes parámetros para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-4, 4]; Paso = 10^{-3} ; Rango = [-2,6]; Decimales= 6

Paso 2

De la gráfica y la tabla podemos concluir que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo [1 , 2].

Paso 3

Presionar el **Botón: Ceros** para calcular el cero correspondiente



Paso 4

Presionamos el **Botón: Resolver**, para obtener la solución. En este caso obtenemos una **Solución** aproximada con 16 decimales

$$x = 1.5240743531717493$$

El usuario en todo momento puede decidir sobre el nivel de precisión con que quiere dar la respuesta.

Ejemplo 2: Encuentre las soluciones (raíces) de

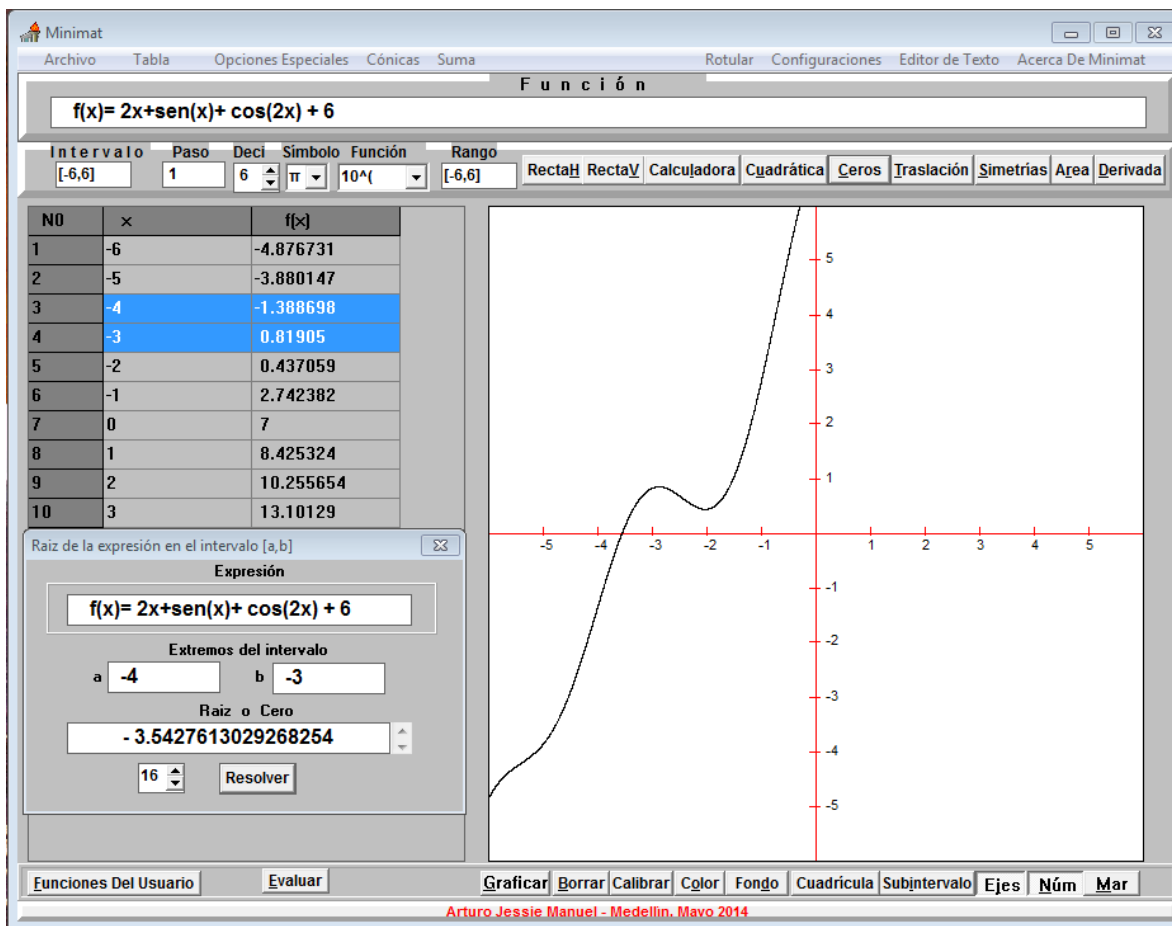
$$2x + \text{sen}(x) + \cos(2x) + 6 = 0$$

Solución.

Paso 1

$$\text{sea } f(x) = 2x + \text{sen}(x) + \cos(2x) + 6$$

el formato funcional de la ecuación dada, fijemos los siguientes parámetros para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-6, 6]; Paso = $10^{\wedge}(-3)$; Rango = [-6,6]; Decimales= 16



Paso 2

De la gráfica y la tabla podemos concluir que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[-4, -3]$.

Paso 3

Presionar el **Botón: Ceros** para calcular el cero correspondiente

Paso 4

Presionamos el **Botón: Resolver**, para obtener la solución. En este caso obtenemos una **Solución** aproximadas con 16 decimales

$$x = -3.5427613029268254$$

El usuario en todo momento puede decidir sobre el nivel de precisión con que quiere dar la respuesta, además utilizando la **Calculadora de Minimát**, a partir de la solución anterior puede dar la respuesta con el número de decimales exigidos.

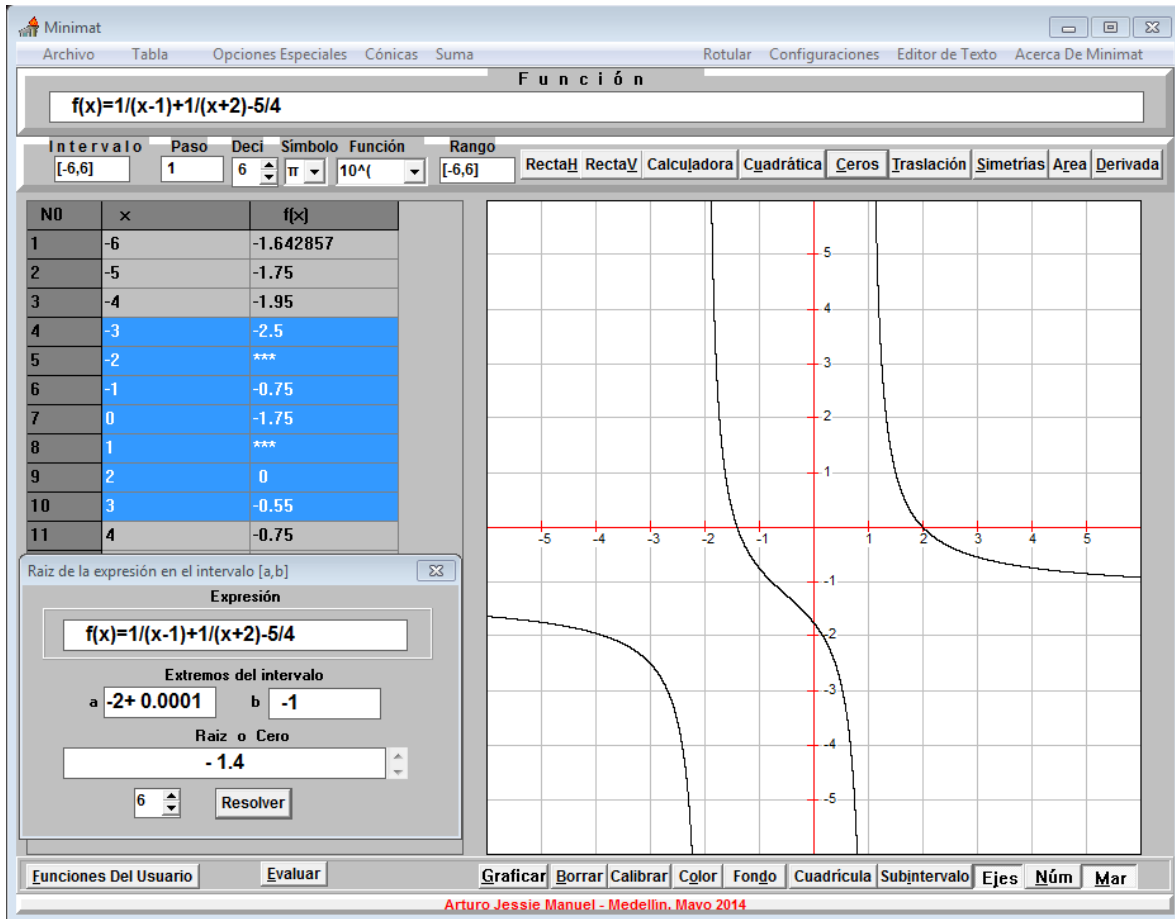
Ejemplo 3: Encuentre las raíces de la siguiente ecuación

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} = 0$$

Solución.

$$\text{sea } f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$$

el formato funcional de la ecuación dada, y sean los parámetro para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-6, 6]; Paso = 10^{-3} ; Rango = [-6,6]; Decimales= 16



De la gráfica y la tabla se concluye que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[-2, -1]$. Sin embargo no podemos evaluar la expresión en $x = -2$, así que para hallar la solución correspondiente utilizamos el intervalo $[-2 + 0.0001, -1]$ en donde los valores de la expresión pasan de positivo (+) a negativo (-), y la solución es $x = -1.4$, como muestra la figura.

Similarmente vemos que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 3]$. Estudiando la tabla tenemos que observamos que $f(2) = 0$. Por lo tanto $x = 2$ es otra solución de la ecuación.

Para hallar los ceros de una expresión podemos generar distintas tablas tratando de detectar donde $f(x) = 0$.

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA RESOLVER UNA DESIGUALDAD.

La desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo igual, las dos expresiones matemáticas se relacionan mediante uno de los símbolos $<$, $>$, \leq o \geq .

Desigualdad	Desigualdad Equivalente	Formato funcional
$A \leq \pm B$	$A \mp B \leq 0$	$f(x) = A \mp B$
$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} \geq \frac{5}{4}$	$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} \geq 0$	$f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$

En la tabla anterior se muestra la desigualdad $A \leq \pm B$ y su forma equivalente $A \mp B \leq 0$, esto quiere decir ambas tienen exactamente las mismas soluciones. Resolver $A \mp B \leq 0$ equivale a hallar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Generalmente las desigualdades tienen infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o unión de intervalos en la recta de números reales.

El formato funcional $f(x) = A \mp B$ permite tabular y graficar la expresión en un intervalo determinado. Luego se analizan los resultados y se toman las decisiones pertinentes. El formato funcional se utiliza en el programa **Minimat** para localizar visualmente los intervalos en los que la gráfica de la expresión está encima, debajo o corta el eje horizontal. En el caso del signo \geq o \leq hay que hallar además las raíces de la expresión.

En el proceso de solución de una desigualdad hay que tomar en cuenta las raíces y los puntos en los cuales la expresión no existe, ya que estos delimitan los intervalos donde se quiere analizar el comportamiento de la expresión. En el programa **Minimat** disponemos de la posibilidad de utilizar la función $sgn(x)$ para resolver la situación.

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UNA DESIGUALDAD.

Siguiendo los lineamientos descritos anteriormente, el proceso de solución de una desigualdad consta de los siguientes pasos:

1. Tabular y trazar la gráfica de la expresión $g(x) = sgn(f(x))$ para localizar visualmente los intervalos en los que la gráfica de la expresión está encima, debajo o corta el eje horizontal.
2. Hallar las raíces y los puntos donde la gráfica de $g(x)$ no existe, para poder delimitar los intervalos con la ayuda de la tabla de valores $g(x)$.
3. Registrar en una tabla el comportamiento de $f(x)$ en cada intervalo.
4. Analizar los resultados y dar la solución de acuerdo a los requerimientos del problema.

EJEMPLOS.

Ejemplo 4: Resuelva la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} \geq \frac{5}{4}$$

Solución.

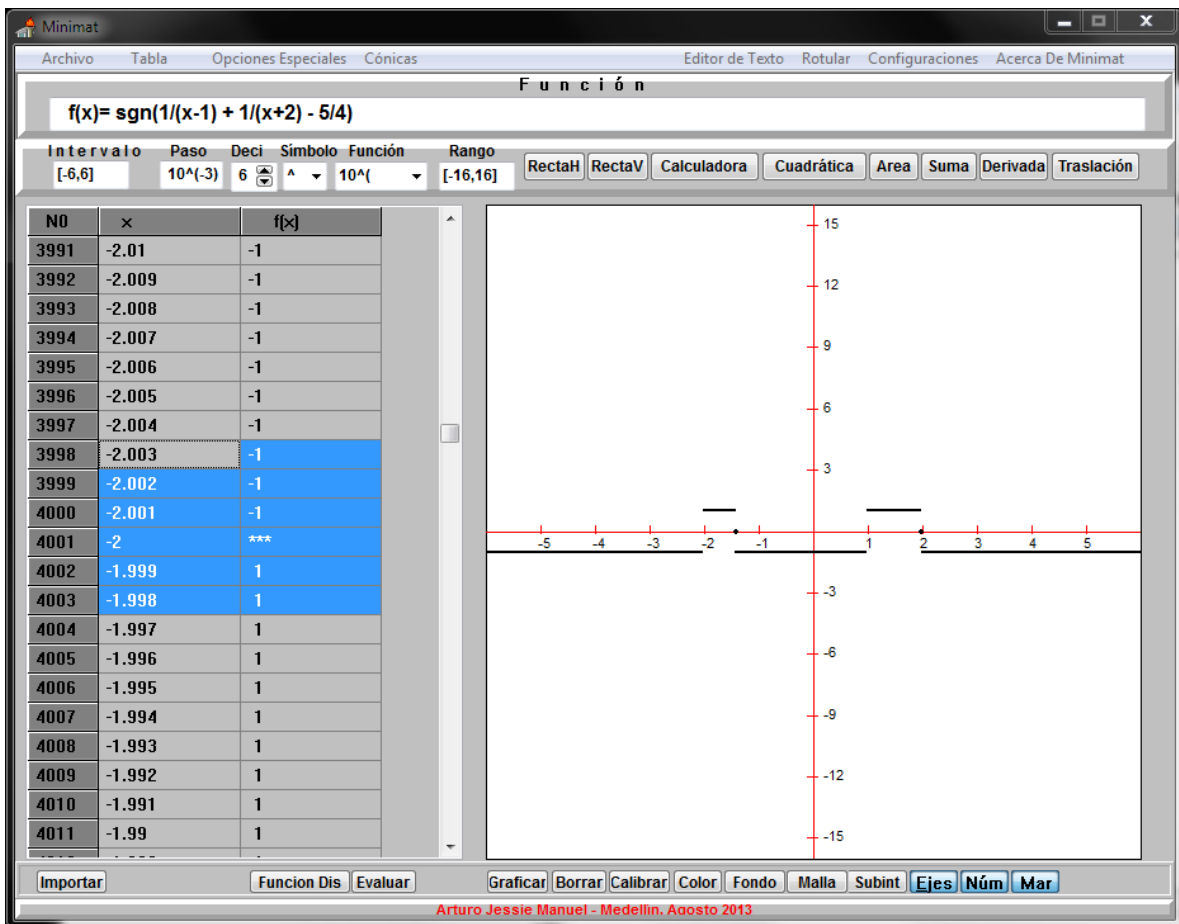
sea $\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} \geq 0$ la forma equivalente y $f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$

la forma funcional, entonces

$$g(x) = \text{sgn}\left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}\right)$$

Evaluemos y tracemos la gráfica de $g(x)$ en el intervalo $[-6, 6]$ con Paso = 10^{-3} ,

y Rango $[-16, 16]$



Sabemos que las raíces de $g(x)$ son $x = -1.4$ y $x = 2$. Además la expresión no existe en los puntos $x = -2$ y $x = 1$?. Estos cuatro puntos delimitan los intervalos en donde vamos a estudiar el comportamiento de la expresión.

Apoyado en la gráfica y la tabla de valores se construye una tabla de comportamiento de la expresión fijando nuestra atención en los puntos cercanos a $x = -2$, $x = -1.4$, $x = 1$ y $x = 2$

INTERVALO	COMPORTAMIENTO DE LA EXPRESIÓN
$(-\infty, -2)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma $x=-2$
$(-2, -1.4]$	Mayor o igual que cero: la grafica esta encima de eje horizontal y toma $x=-1.4$
$(-1.4, 1)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma $x=1$
$(1, 2]$	Mayor o igual que cero: la gráfica esta encima del eje horizontal y toma $x=2$
$(2, +\infty)$	Menor que cero: La gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma $x=2$

Notese que la desigualdad dada también es equivalente a

$$\frac{(-5x^2 + 3x + 14)}{4(x - 1)(x + 2)} \geq 0$$

y la solución es la unión de dos intervalos, es decir $(-2, -1.4] \cup (1, 2]$

Observe que una vez elaborado la tabla de comportamiento es muy facil dar la respuesta.

La funcion $sgn(x)$ muestra las aproximaciones de las raíces y los puntos donde la expresión no existe.

Ejemplo 5: Resuelva la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| < 4$$

Solución.

sea $\left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| - 4 < 0$ la forma equivalente y $f(x) = \left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| - 4$

la forma funcional, entonces

$$g(x) = sgn\left(\left|\frac{3 - 2x}{2 + x}\right| - 4\right)$$

Evaluemos y tracemos la gráfica de $g(x)$ en el intervalo $[-8, 4]$ con Paso = 10^{-3} ,

y Rango $[-16, 16]$

La tabla muestra que $x = -5.5$ es una raíz y que existe otra raíz en el intervalo $[-1, 0]$.

Utilizando el Botón Ceros obtenemos que

$$x = -0.8333333333333331 \approx -\frac{5}{6}$$

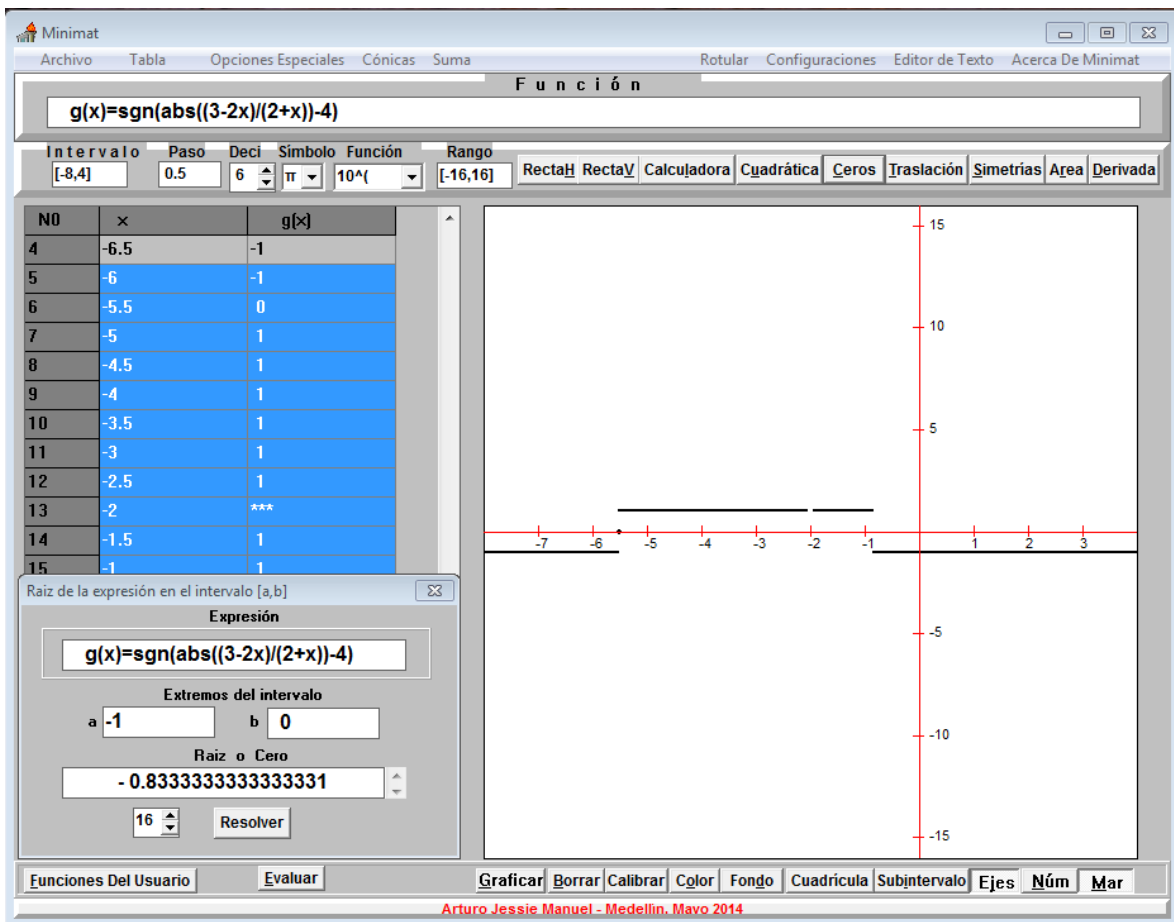
es también raíz de $f(x)$.

Además la gráfica no existe en el punto $x = -2$.

Con estos datos se prepara la tabla de comportamiento centrado en tipo de respuesta que se busca, de acuerdo con el signo de la desigualdad.

$$\left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right| - 4 < 0$$

En este caso las solución corresponde a los intervalos en los cuales la gráfica esta debajo del eje horizontal, es decir **todos los x tal que $g(x) = -1$** .



INTERVALO	COMPORTAMIENTO DE LA EXPRESIÓN
$(-\infty, -5.5)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal
$[-5.5, -2)$	Mayor o igual que cero: la grafica esta encima de eje horizontal y toma $x=-5.5$
$(-2, -5/6]$	Mayor o igual que cero : la gráfica esta encima del eje horizontal y toma $x= -5/6$
$(-5/6, +\infty)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo eje horizontal

La solución de la desigualdad es la unión de dos intervalos , es decir $(-\infty, -5.5) \cup \left(\frac{-5}{6}, +\infty\right)$

En todos los casos la gráfica y la tabla de la expresión nos ayudan a tomar desiciones, sin embargo hay que estar atento a los detalles y a la correcta aplicación de los conceptos y los métodos formales de la matemática.

Podemos hallar el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

FUNCIONALIDAD MINIMAT.

Para agilizar la edición se puede utilizar las siguientes opciones de edición incorporado en el programa minimat:

1. **Insertar** : señalar mediante un click el sitio donde se va a insertar el dato + seleccionar el dato + un click. Esto es útil para pasa información ente dos elemento, por ejemplo ente la **Tabla** y el **Intervalo**.
2. **Copiar** : señalar + doble click. Esto permite copiar una información para luego pegarlo en otra parte.

En el programa **Minimat** la función signo de define como,

$$sgn(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si} & \mathbf{x} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si} & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{si} & \mathbf{x} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Es importante anotar que esta función asigna el valor cero a todo x , tal que $|x| \leq 10^{-15}$.

Podemos utilizar la función signo para determinar aproximadamente los intervalos en los cuales una expresión es positiva, negativa o cero, es decir que podemos hallar soluciones aproximadas de ecuaciones y desigualdades, analizando la tabla y la gráfica del signo de la expresión dada.

Profesor

Arturo Jessie Manuel

e-mail: ajessie@unal.edu.co

Junio 12 de 2014