USOS DEL PROGRAMA MINIMAT

(GUÍA N^0 002)

Solución aproximada de ecuaciones y desigualdades de una variable

Se trata de obtener la solución aproximada de una ecuación o de una desigualdad utilizando el programa **Minimat**, aplicando el método de aproximaciones susesivas. La ecuación o desigualdad debe tener una sola variable o incógnita.

I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

En este caso hay que recordar que una ecuación es un enunciado en el que se establece que las dos expresiones matemáticas son iguales.

Ecuación	Ecuación Equivalente	Formato funcional
$A = \pm B$	$A \mp B = 0$	$f(x) = A \mp B$
$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} = \frac{5}{4}$	$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} = 0$	$f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$

En la tabla anterior se nuestra la ecuación $\boldsymbol{A = \pm B}$ y su forma equivalente $\boldsymbol{A \mp B = 0}$, esto quiere decir ambas tiene exactamente las mismas soluciones. Resolver $\boldsymbol{A \mp B = 0}$ equivale a hallar el valor que toma la variable en el punto donde la gráfica de la ecuación corta el eje horizontal. Una ecuación puede tener una, ninguna o varias soluciones.

El formato funcional $\boldsymbol{f(x) = A \mp B}$ permite tabular y graficar la expresión en un intervalo determinado. Luego se analizan los resultados y se toman las decisiones pertinentes. El formato funcional se utiliza en el programa **Minimat** para localizar visualmente los intervalos en que la gráfica de la expresión corta el eje horizontal, esto quiere decir que alrededor de dicho puntos los valores de la expresión cambian de signo, pasan de positivo (+) a negativo (-) o de negativo (-) a positivo (+).

Luego si $\boldsymbol{x_1 \ y \, x_2}$ tienen signo diferente y la gráfica corte el eje horizontal en el intervalo $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$, todo valor $\boldsymbol{x \ tal \ que \ x_1 \leq x \leq x_2}$ es una raiz aproximada de la ecuación.

La precisión de la solución depende del tamaño del intervalo $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$, por lo tanto se debe elegir el menor intervalo que contiene la raiz de la ecuación.

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN.

Siguiendo los lineamientos descritos anteriormente , el proceso denominado **Método de Aproximaciones Sucesivas** consta de un conjunto de iteraciones.

0. Tabular y trazar la gráfica de la expresión, tratando de localizar visualmente los puntos en donde la gráfica corta el eje horizontal (solución). En el programa minimat se recomienda

un intervalo = [-k , k] y Paso = 10^(-t). Para cada solución o punto de corte se seleciona de la tabla el menor subintervalo de $[x_1, x_2]$, que contiene el punto de corte. Los valores de $\boldsymbol{x_1\ y\ x_2}$, serán las dos primeras soluciones aproximadas de la expresión.

1. Esta iteración inicia estableciendo los parámetros para genera una nueva solución. Tomamos intervalo = $[x_1, x_2]$ y Paso = 10^(-t-4). Luego presionar secuencialmente los botones $\boldsymbol{Evaluar \rightarrow Calibrar \rightarrow Borrar \rightarrow Graficar}$, para producir una nueva solución, con una precision mayor que la anterior. El menor subintervalos $[x_3, x_4]$ que contiene la solución se selecciona de la tabla tal como se describe en la iteración 0. Los valores de $\boldsymbol{x_3\ y\ x_4}$, serán dos raices aproximadas de la expresión. Es convienente anotar que todo $\boldsymbol{x\ tal\ que\ x_3 \leq x \leq x_4}$ es tambien solución.
2. El proceso se repite hasta lograr la precisión deseada. Tomando en cuenta que el intervalo corresponde al subintervalo menor seleccionado en la iteración anterior y utilizando un **paso** cada vez mas pequeño. El programa **Minimat** permite utilizar un paso tan pequeño como 10^{-16} .
3. En cada iteración el **paso** da cuenta de la precisión de solución, ya que está directamente relacionado con el número de cifras significativas que tiene la variable.

La aproximación sucesiva nos ayuda en la busqueda las raices de ecuaciones y a tomar decisiones a partir de gráfica y datos numérico, sin embargo hay que estudiar sus bondades y sus dificultades.

EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Encuentre las soluciones (raices) de

$$-3x^3 + 5x = -3$$

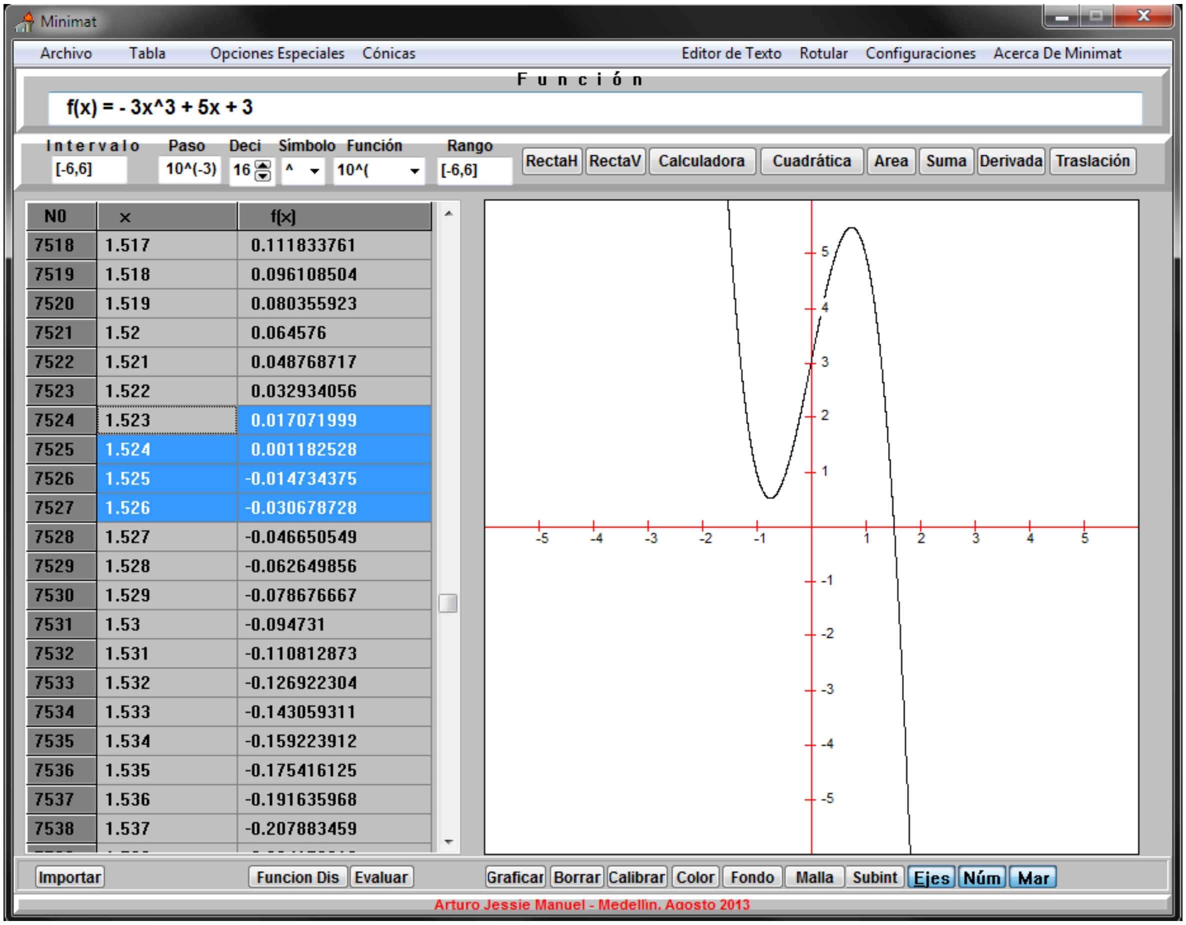
Solución.

Pocedemos a organizar la información para poder obtener las soluciones aproximadas utilizando **Minimat**.

Iteración 0

$$sea \quad f(x) = -3x^3 + 5x + \ 3$$

el formato funcional de la ecuación dada, fijemos los siguientes parámetro para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-6, 6]; Paso = 10^(-3); Rango = [-6,6]; Decimales= 16



De la gráfica y la tabla podemos concluir que $f(x)$ tiene una raiz en el intervalo $[1\,,2]$. Estudiando la tabla tenemos que el intervalo mas pequeño que contiene la solución es $[1.524\,,1.525]$ ya que la los valores de la expresión pasan de positivo (+) a negativo (-).

El intervalos $[1.524\,,1.525]$ contiene soluciones aproximadas con tres decimales y con este resultado iniciamos la siguiente iterción.

Iteración 1

Los paramétros para **Minimat** ahora son: Intervalo= [1.524, 1.525]; Paso = 10^(-7); Decimales= 16

Evaluamos y graficamos presionando: $\boldsymbol{Evaluar} \rightarrow \boldsymbol{Calibrar} \rightarrow \boldsymbol{Borrar} \rightarrow \boldsymbol{Graficar}$, para obtener la nueva solución $[1.5240743{,}1.5240744]$

Iteración 3

Los paramentro para **Minimat** ahora son: Intervalo= [1.5240743, 1.5240744]; Paso = 10^(-11); Decimales= 16

Evaluamos y graficamos presionando: $\boldsymbol{Evaluar} \rightarrow \boldsymbol{Calibrar} \rightarrow \boldsymbol{Borrar} \rightarrow \boldsymbol{Graficar}$, para obtener la nueva solucion $[1.52407435317, 1.52407435318]$

Iteración 4

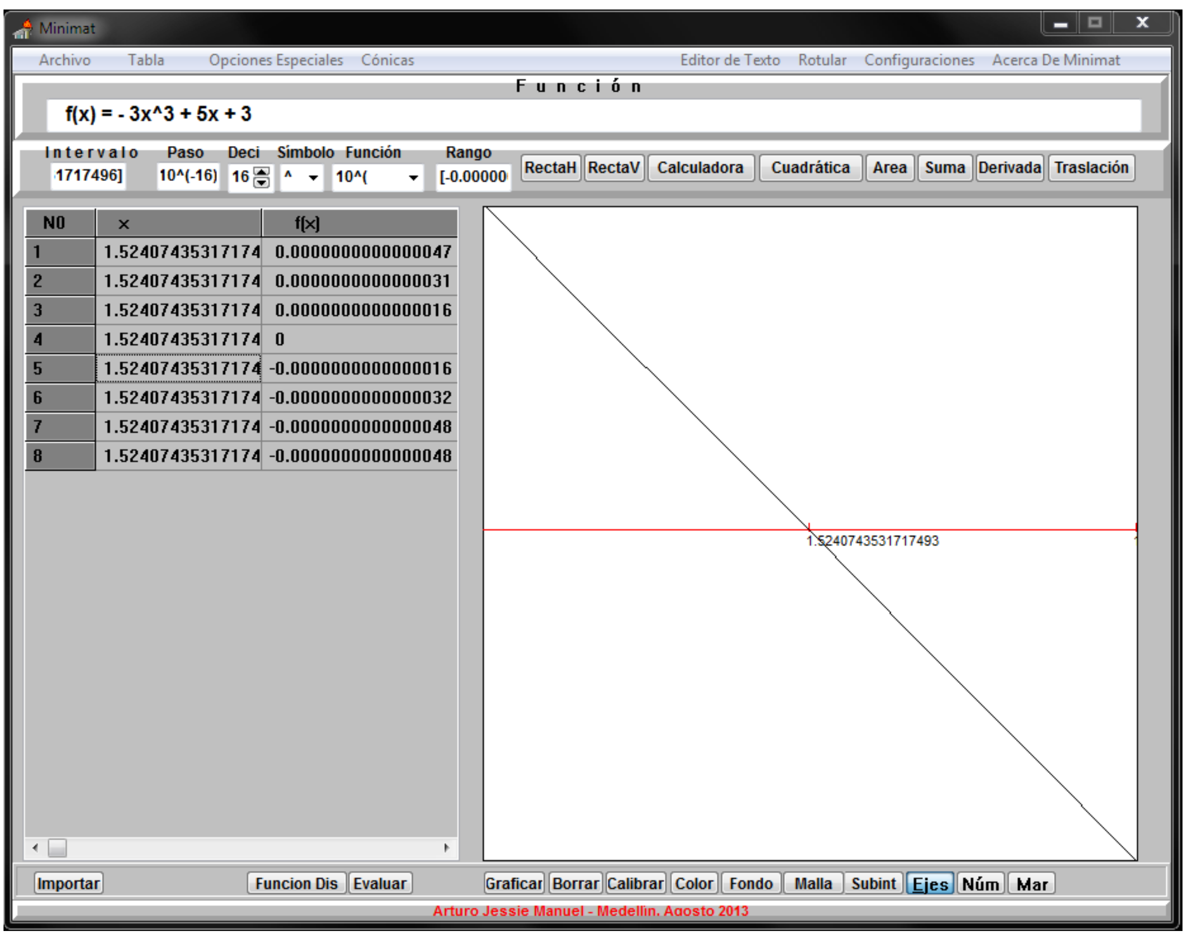
Los paramentro para **Minimat** ahora son: Intervalo= [1.52407435317, 1.52407435318]; Paso = 10^(-15); Decimales= 16

Evaluamos y graficamos presionando: $\boldsymbol{Evaluar} \rightarrow \boldsymbol{Calibrar} \rightarrow \boldsymbol{Borrar} \rightarrow \boldsymbol{Graficar}$, para obtener la nueva solucion $[1.524074353171749, 1.52407435317175]$

Iteración 5

Los paramentro para **Minimat** ahora son: Intervalo= [1.524074353171749, 1.52407435317175]; Paso = 10^(-16); Decimales= 16

Evaluamos y graficamos presionando: $\boldsymbol{Evaluar} \rightarrow \boldsymbol{Calibrar} \rightarrow \boldsymbol{Borrar} \rightarrow \boldsymbol{Graficar}$, para obtener la nueva solucion $[1.5240743531717492, 1.5240743531717494]$



El **último Intervalo Solución** contiene raices aproximadas con 16 decimales tales como

$$\boldsymbol{x = 1.5240743531717493}$$

El usuario en todo momento puede decidir sobre el nivel de precisión con que quiere dar la respuesta.

Ejemplo 2: Encuentre las soluciones (raices) de

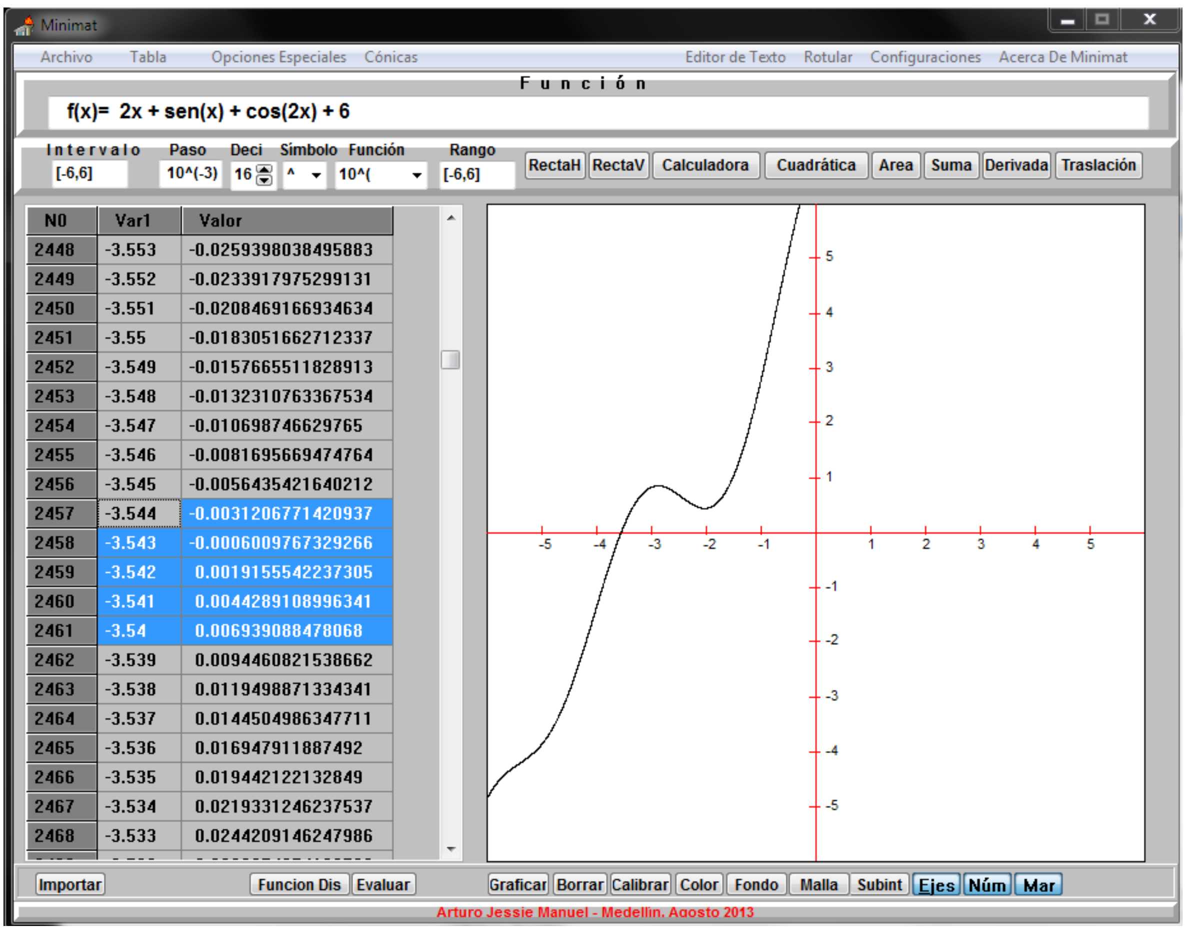
$$2x + sen(x) + \cos(2x) + 6 = 0$$

Solución.

Iteración 0

$$sea \quad f(x) = 2x + sen(x) + \cos(2x) + 6$$

el formato funcional de la ecuación dada, fijemos los siguientes parámetro para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-6, 6]; Paso = 10^(-3); Rango = [-6,6]; Decimales= 16



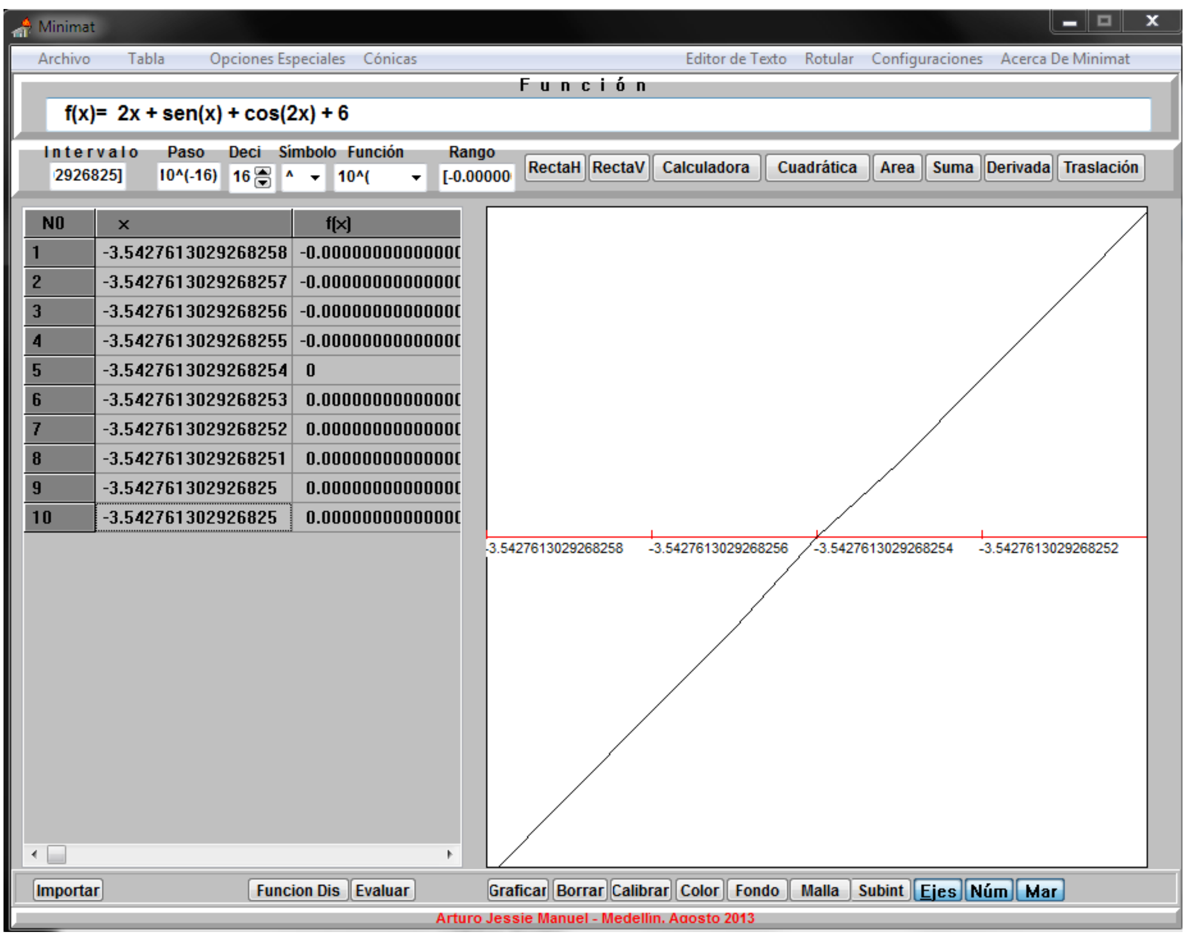
De la gráfica y la tabla podemos concluir que $f(x)$ tiene una raiz en el intervalo $[-4\,,-3]$. Estudiando la tabla tenemos que el intervalo mas pequeño que contiene la solución es $[-3.543\,,-3.542]$ ya que la los valores pasan de negativo (-) a positivo (+).

El intervalos $[-3.543\,,-3.542]$ contiene soluciones aproximadas con tres decimales y con este resultado iniciamos la siguiente iteración.

Los resultados de las iteraciones se dan en la tabla siguiente, tomando en cuenta que para obtener el **Intervalo Solución** siguiente basta utilizar en **Minimat** como **Intervalo** el **Intervalo Solución** anterior y ajustar el valor del Paso.

Luego Evaluamos y graficamos presionando: $\boldsymbol{Evaluar} \rightarrow \boldsymbol{Calibrar} \rightarrow \boldsymbol{Borrar} \rightarrow \boldsymbol{Graficar}$

Iteración	Paso	Intervalo Solución
0	10^{-3}	$[-3.543\,,-3.542]$
1	10^{-7}	$[-3.5427614, -3.5427613]$
2	10^{-11}	$[-3.54276130293, -3.54276130292]$
3	10^{-15}	$[-3.542761302926826, -3.542761302926825\,]$
4	10^{-16}	$[-3.5427613029268255, -3.5427613029268253]$



El **último Intervalo Solución** contiene raices aproximadas con 16 decimales, tales como

$$x = -3.5427613029268254$$

El usuario en todo momento puede decidir sobre el nivel de precisión con que quiere dar la respuesta, además utilzando la **Calculadora de Minimat**, a partir de la solución anterior puede dar la respuesta con el número de decimales exigidos.

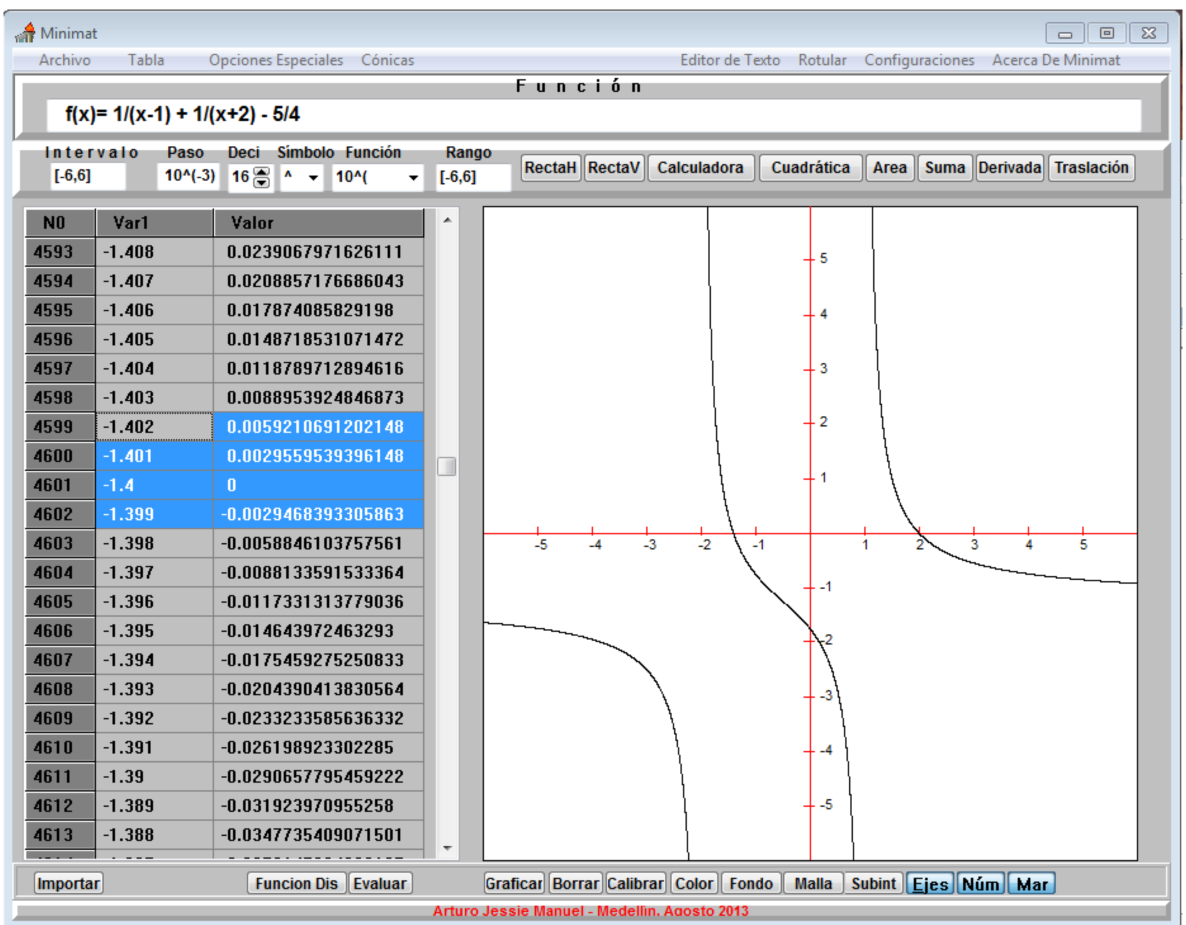
Ejemplo 3: Encuentre las raices de la siguiente ecuación

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} = 0$$

Solución.

$$sea\ \ f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$$

el formato funcional de la ecuación dada, y sean los parámetro para trazar y evaluar la expresión inicialmente: Intervalo= [-6, 6]; Paso = 10^(-3); Rango = [-6,6]; Decimales= 16



De la gráfica y la tabla podemos concluir que $f(x)$ tiene una raiz en el intervalo $[-2\,,-1]$. Estudiando la tabla tenemos que el intervalo mas pequeño que contiene la solución es $[-1.401\,,-1.399]$ ya que la los valores de la expresión pasan de positivo (+) a negativo (-).

Dentro del **Intervalo Solución** observamos que $\boldsymbol{f(-1.4)=0}$. Por lo tanto $\boldsymbol{x= \ -1.4}$

es una solución de la ecuación.

Similarmente vemos que $f(x)$ tiene una raiz en el intervalo $[1\,,3]$. Estudiando la tabla tenemos que el intervalo mas pequeño que contiene la solución es $[1.999\,,2.001]$ ya que la los valores pasan de positivo (+) a negativo (-).

Dentro del **Intervalo Solución** observamos que $\boldsymbol{f(2)=0}$. Por lo tanto $\boldsymbol{x= \ 2}$

es otra solución de la ecuación.

En este caso obtuvimos las dos soluciones de la ecuación sin necesidad de realizar iteraciones.

Que ocurre si realizamos las iteraciones?

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA RESOLVER UNA DESIGUALDAD.

La desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo igual, las dos expresiones matemáticas se relacionan mediante uno de los símbolos <, >, ≤ o ≥ .

Desigualdad	Desigualdad Equivalente	Formato funcional
$A \le \pm B$	$A \mp B \le 0$	$f(x) = A \mp B$
$\dfrac{1}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)} \ge \dfrac{5}{4}$	$\dfrac{1}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{5}{4} \ge 0$	$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{5}{4}$

En la tabla anterior se nuestra la desigualdad $\boldsymbol{A \le \pm B}$ y su forma equivalente $\boldsymbol{A \mp B \le 0}$, esto quiere decir ambas tiene exactamente las mismas soluciones. Resolver $\boldsymbol{A \mp B \le 0}$ equivale a hallar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Generalmente las desigualdades tienen infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o unión de intervalos en la recta de números reales.

El formato funcional $\boldsymbol{f(x) = A \mp B}$ permite tabular y graficar la expresión en un intervalo determinado. Luego se analizan los resultados y se toman las decisiones pertinentes. El formato funcional se utiliza en el programa **Minimat** para localizar visualmente los intervalos en los que la gráfica de la expresión esta encima, debajo o corta el eje horizontal. En el caso del signo ≥ o ≤ hay que hallar además las raices del expresión.

En el proceso de solución de una desigualdad hay que tomar en cuenta las raices y los punto en los cuales la expresión no existe, ya que estos delimitan los intervalos donde se quiere analizar el comportamiento de la expresión. En el programa **Minimat** disponemos de la posiblidad de utilizar la función $\boldsymbol{sgn(x)}$ para resolver la situación.

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVA PARA RESOLVER UNA DESIGUALDAD.

Siguiendo los lineamientos descritos anteriormente, el proceso denominado **Método de Aproximaciones Sucesivas** consta de los siguientes pasos.

1. Tabular y trazar la gráfica de la expresión $\boldsymbol{g(x) = sgn(f(x))}$ para localizar visualmente los intervalos en los que la gráfica de la expresión esta encima, debajo o corta el eje horizontal. Para **Minimat** se recomienda un intervalo = [-k , k] y Paso = 10^(-t).
2. Hallar las raices y los puntos donde la gráfica de $\boldsymbol{g(x)}$ no existe, para poder delimitar los intervalos con la ayuda de la tabla de valores $\boldsymbol{g(x)}$.
3. Registrar en una tabla el comportamiento de $f(\boldsymbol{x})$ en cada intervalo.
4. Analizar los resultados y dar la solución de acuerdo a los requerimientos del problema.

EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Resuelva la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} \geq \frac{5}{4}$$

Solución.

$sea\ \ \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4} \geq 0\ \ la\ forma\ equivalente\ y\ f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}$

$la\ forma\ funcional$, entonces

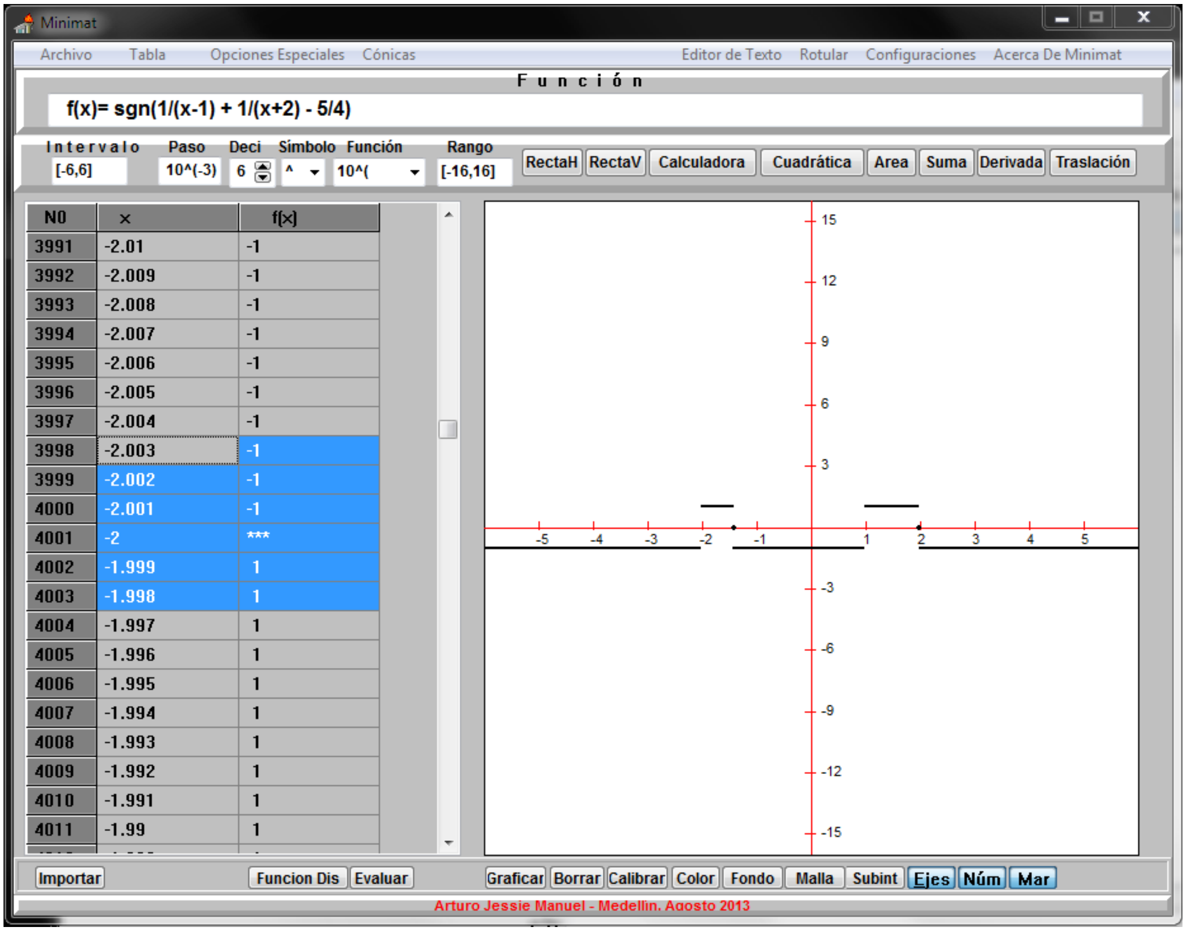
$$g(x) = sgn\left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{4}\right)$$

Evaluemos y tracemos la gráfica de $g(x)$ en el intervalo [-6, 6] con Paso = 10^(-3),

y Rango [-16,16]

Sabemos que las raices de $\boldsymbol{f(x)\ son\ x = -1.4\ y\ x = 2}$ **.** Además la expresión no existe en los puntos $\boldsymbol{x = -2\ y\ x = 1}$ **?**. Estos cuatro puntos delimitan los intervalos en donde vamos a estudiar el comportamiento de la expresión.

Apoyado en la gráfica y la tabla de valores se construye una tabla de comportamiento de la expresión fijando nuestra atención en los puntos cercanos a $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{x = -1.4}$, $\boldsymbol{x = 1\ \ y\ \ x = 2}$



INTERVALO	COMPORTAMIENTO DE LA EXPRESIÓN
$(-\infty\ ,\mathbf{-2})$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma x=-2
$(\mathbf{-2}\ ,\mathbf{-1.4}]$	Mayor o igual que cero: la grafica esta encima de eje horizontal y toma x=-1.4
$(\mathbf{-1.4}\ ,\mathbf{1}\ )$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma x=1
$(\mathbf{1}\ ,\ \mathbf{2}\ ]$	Mayor o igual que cero: la gráfica esta encima del eje horizontal y toma x=2
$(\ \mathbf{2}\ ,+\infty)$	Menor que cero: La gráfica esta debajo del eje horizontal y no toma x=2

Notese que la desigualdad dada también es equivalente a

$$\frac{(-5x^2\ + 3x + 14)}{4(x-1)(x+2)} \geq 0$$

y la solución es la unión de dos intervalos , es decir $(\mathbf{-2}\ ,\mathbf{-1.4}] \cup (\ \mathbf{1}\ ,\ \ \mathbf{2}\ ]$

Observe que una vez elaborado la tabla de comportamiento es muy facil dar la respuesta.

La funcion $\boldsymbol{sgn(x)}$ muestra los aproximaciones de las raices y los puntos donde la expresión no existe, sin embargo se puede realizar iteraciones para mejora la precisión.

Ejemplo 2: Resuelva la siguiente desigualdad

$$\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| < 4$$

Solución.

$sea \quad \left|\frac{3-2x}{2+x}\right| - 4 < 0 \;\; la\ forma\ equivalente\ y \quad f(x) = \left|\frac{3-2x}{2+x}\right| - 4$

$la\ forma\ funcional$, entonces

$$g(x) = sgn\left(\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| - 4\right)$$

Evaluemos y tracemos la gráfica de $g(x)$ en el intervalo [-8, 4] con Paso = 10^(-3),

y Rango [-16,16]

La tabla muestra que $\boldsymbol{x = -5.5\ es\ una\ raiz}$ y que existe otra raiz en el intervalo $[\mathbf{-1}, \mathbf{0}]$**.** Realizando las iteraciones necesarias obtenemos que

$$\boldsymbol{x = -0.8333333333333334 \approx \frac{-5}{6}}$$

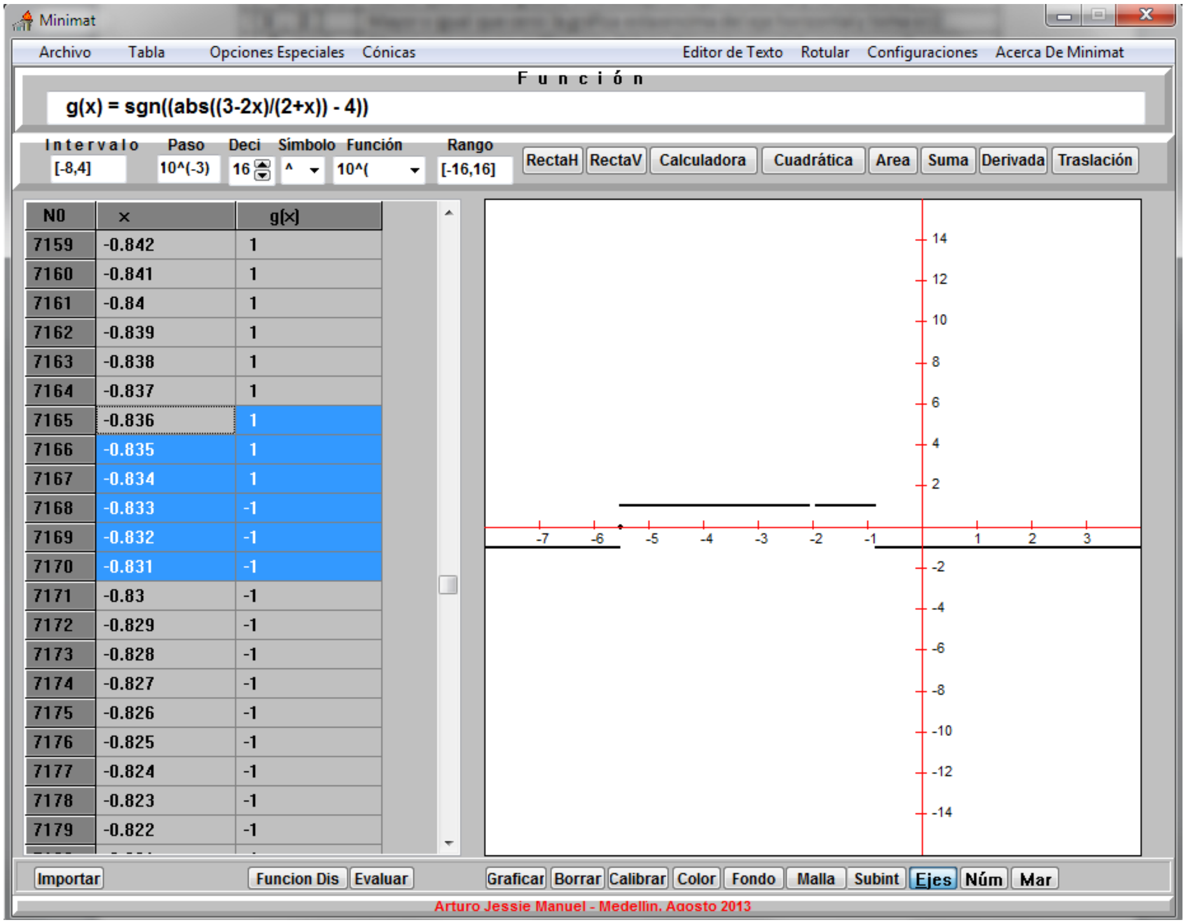
$\boldsymbol{es\ tambi}$é$\boldsymbol{n\ raiz\ de\ f(x)}$.

Además la gráfica no existe en el punto $\boldsymbol{x = -2}$**.**

Con estos datos se prepara la tabla de comportamiento centrado en tipo de respuesta que se busca, de acuerdo con el signo de la desigualdad.

$$\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| - 4 < 0$$

En este caso las solución corresponde a los intervalos en los cuales la gráfica esta debajo del eje horizontal, es decir $\boldsymbol{todos\ los\ x\ tal\ que\ g(x) = -1}$.



INTERVALO	COMPORTAMIENTO DE LA EXPRESIÓN
$(-\infty\ \ ,-5.5\,)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo del eje horizontal
$[-5.5,-2)$	Mayor o igual que cero: la grafica esta encima de eje horizontal y toma x=-5.5
$(-2,-5/6]$	Mayor o igual que cero : la gráfica esta encima del eje horizontal y toma x= -5/6
$(-5/6,+\infty)$	Menor que cero: la gráfica esta debajo eje horizontal

La solución de la desigualdad es la unión de dos intervalos , es decir $(-\infty,-5.5)\cup\left(\frac{-5}{6},+\infty\right)$

En todos los casos la gráfica y la tabla de la expresión nos ayudan a tomar desiciones, sin embargo hay que estar atento a los detalles y a la correcta aplicación de los conceptos y los métodos formales de la matemática.

Podemos hallar el dominio de la función

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

FUNCIONALIDAD MINIMAT.

Para agilizar la edición se puede utilizar las siguentes opciones de edición incorporado en el programa minimat:

1. **Insertar :** señalar mediante un click el sitio donde se va a insertar el dato + seleccionar el dato + un click. Esto es útil para pasa informción ente dos elemento, por ejemplo ente la **Tabla** y el **Intervalo**.
2. **Copiar :** señalar + doble click. Esto permite copiar una información para luego pegarlo en otra parte.

En el programa **Minimat** la función signo de define como,

$$\boldsymbol{sgn(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x > 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x = 0} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$

Es importante anotar que esta función asigna el valor cero a todo $\boldsymbol{x}$, tal que $\boldsymbol{|x| \leq 10^{-15}}$.

Podemos utilizar la función signo para determinar aproximadamente los intervalos en los cuales una expresión es positiva, negativa o cero, es decir que podemos hallar soluciones aproximadas de ecuaciones y desigualdades, analizando la tabla y la gráfica del signo de la expresión dada.

Profesor

Arturo Jessie Manuel

e-mail: ajessie@unal.edu.co

Octubre de 2013