USOS DEL PROGRAMA MINIMAT

(PROYECTO DE AULA 1)

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Se trata de obtener el valor aproximado del límite de una funcion de una variable utilizando el programa minimat, aplicando el método de aproximaciones susesivas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.

No se trata de un estudio riguroso de conceptos, sino de una apropiación de los mismos tal como lo prueba y lo acepta la matemática. La pregunta fundamental es como presentar el tema si queremos mejorar el poceso enseñanza aprendizaje.

DEFINICIÓN.

Escribimos

$$\lim_{x \to k} f(x) = L$$

y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a k, es igual a L" si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) escogiendo una x lo bastante cerca de k, pero no igual a k.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a k, por la izquierda o por la derecha de k, pero con x$\neq k$.

(Tomado de : Cálculo conceptos y contextos de James Stewart)

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVA.

Siguiendo los lineamientos de la definición anterior, el proceso denominado **Método de Aproximaciones Sucesivas** consta de los siguientes pasos.

1. Elegir un intervalos pequeño que contiene el valor k al que tiende la variable x. En el programa minimat se recomienda el intervalo: [k - 10^(-t) , k + 10^(-t)]
2. Fijar un paso para determinar los puntos del intervalo, en los que se a evaluar la función. Un valor razonable puede ser : 10^(-t-1)
3. Ajustar el número de decimales a utilizar y el rango, de tal manera que se pueda visualizar graficar la función en el intervalo del paso 1.
4. Evaluar y graficar la función .
5. Se analiza la tabla y la gráfica tomando en cuenta que si los valores obtenido (segunda columna de la tabla) se acercan (se aproximan) a un mismo número, dicho valor es el límite, y en caso contrario el límite no existe. Si el límite existe el valor único L al que se aproxima es el límite de la función cuando x tiende al valor k , e indica que todos los

puntos de la tabla estan muy cercanos a la recta y= L , entonces la gráfica de la función en ese intervalo se aproxima a una recta horizontal.

La aproximación sucesiva nos ayuda en la busqueda de una solución del problema. Luego hay que poceder a resolver formalmente el problema empleando los métodos , conceptos y procedimientos propios de la matemática. Desde el punto de vista de la matemática, mientras no se calcula el límite formalmente estamos ante una congetura.

EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Encuentre el valor de

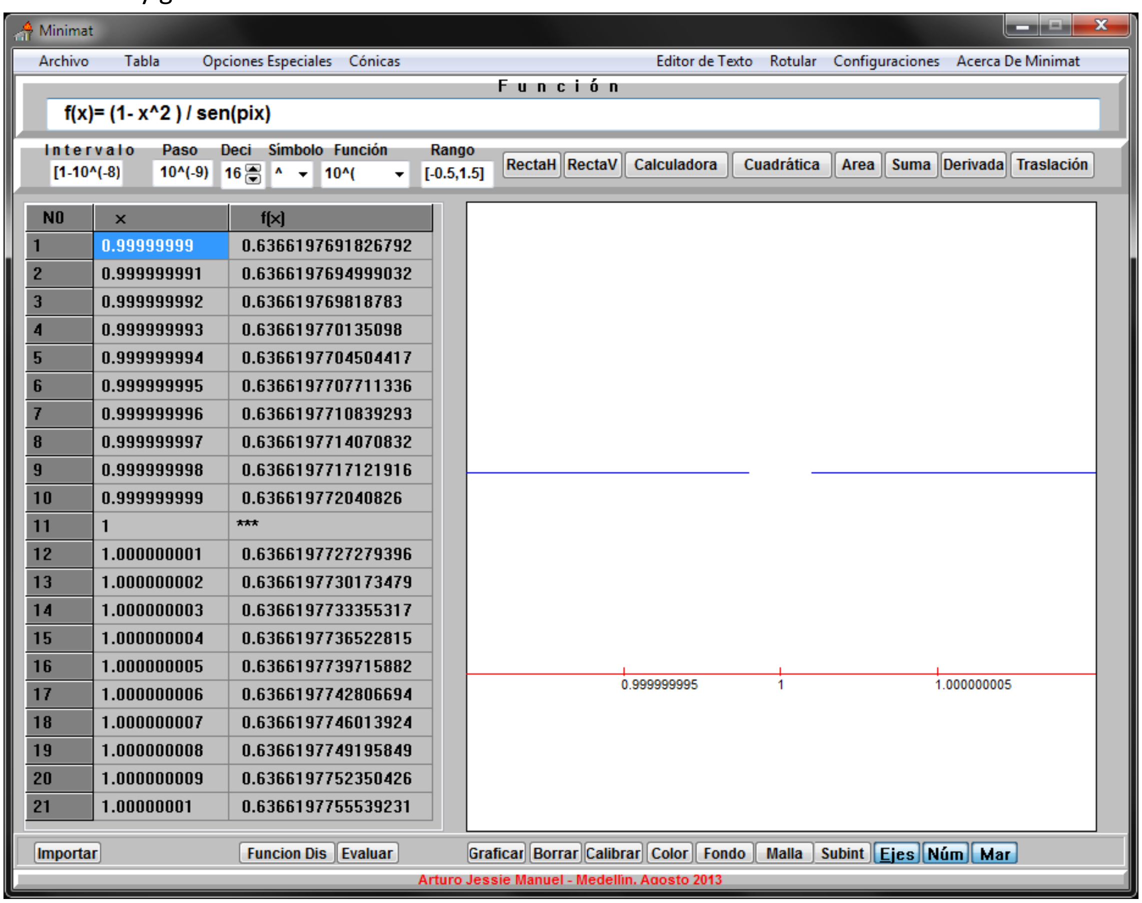
$$\lim_{x \to 1} \frac{(1 - x^2)}{sen(\pi x)}$$

Solución.

Definamos los parámetro necesarios para que **Minimat** genere la tabla de valores y la gráfica de la función en un intervalo pequeño que contiene al punto $k = 1$.

Intervalo= [1-10^(-8), 1+10^(-8)]; Paso = 10^(-9); Rango = [-0.5,1.5]; Decimales= 10

Evaluamos y graficamos



N0	x	f[x]
1	0.99999999	0.6366197691826792
2	0.999999991	0.6366197694999032
3	0.999999992	0.636619769818783
4	0.999999993	0.636619770135098
5	0.999999994	0.6366197704504417
6	0.999999995	0.6366197707711336
7	0.999999996	0.6366197710839293
8	0.999999997	0.6366197714070832
9	0.999999998	0.6366197717121916
10	0.999999999	0.636619772040826
11	1	***
12	1.000000001	0.6366197727279396
13	1.000000002	0.6366197730173479
14	1.000000003	0.6366197733355317
15	1.000000004	0.6366197736522815
16	1.000000005	0.6366197739715882
17	1.000000006	0.6366197742806694
18	1.000000007	0.6366197746013924
19	1.000000008	0.6366197749195849
20	1.000000009	0.6366197752350426
21	1.00000001	0.6366197755539231

Analicemos la parte central de la tabla de valores y la gráfica. (El usuario puede generar tablas de distintos tamaños modificando el valor asginado al parámetro paso).

Como la gráfica es una recta horizontal y observamos en la tabla que todos los valores se acercan a 0.63661977, (con ocho decimales). Diremos que el límite es aproximadamente igual

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)}{sen(\pi x)} \approx 0.63661977$$

Es importante recalcar que la función no toma el valor $x = 1$.

Formalmente al calcular, $\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)}{sen(\pi x)}$ se obtiene que el valor exacto

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)}{sen(\pi x)} = \frac{2}{\pi}$$

Observamos además que $abs\left(\frac{2}{\pi} - 0.63661977\right) = 0.0$, lo que indica que hemos obtenido una muy buena aproximación al valor exacto del límite.

Ejemplo 2: Encuentre el valor de

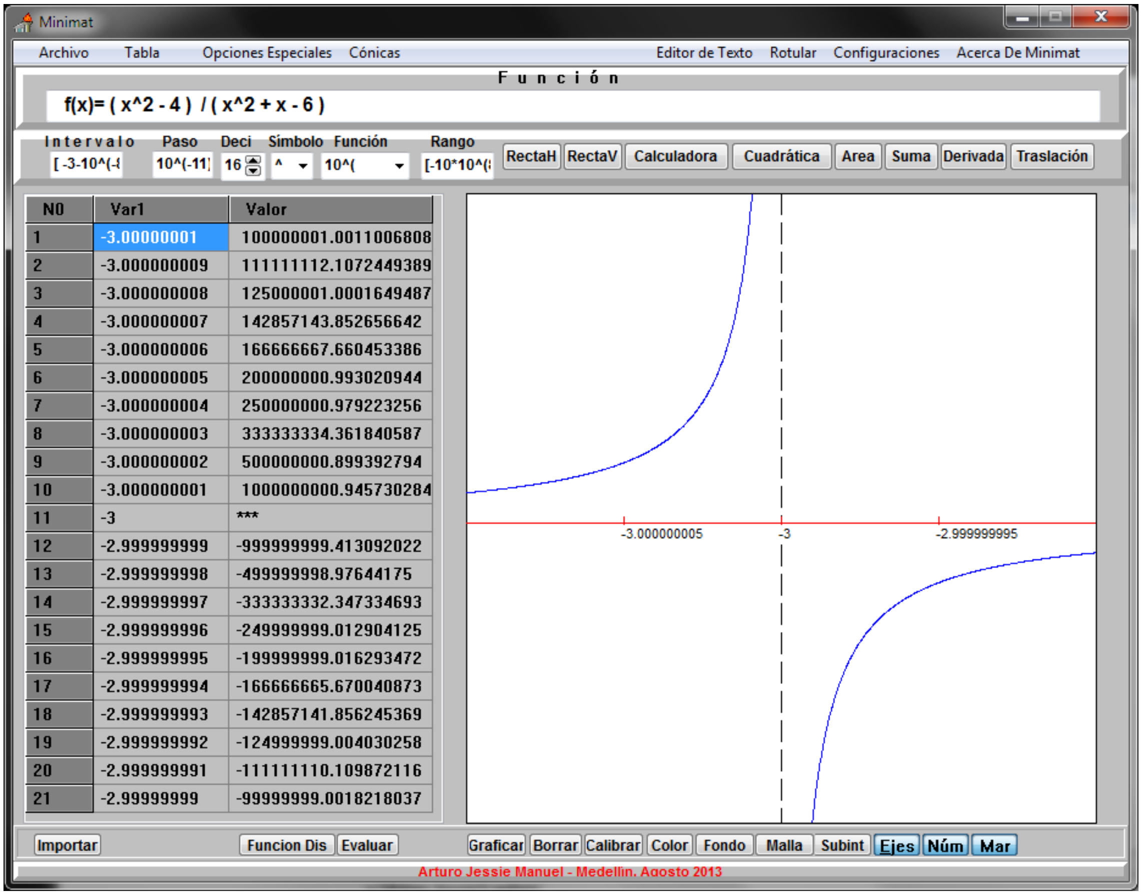
$$\lim_{x\to -3} \frac{(x^2-4)}{(x^2+x-6)}$$

Solución.

Definamos los parámetro necesarios para que **Minimat** genere la tabla de valores y la gráfica de la función en un intervalo pequeño que contiene al punto $k = -3$.

Intervalo= [-3-10^(-8), -3+10^(-8)]; Paso = 10^(-9); Rango = [-10*10^(8),1.1*10^(9)] ; Decimales=12

Evaluamos y graficamos



Analicemos la parte central de la tabla de valores y la gráfica.

En este caso tenemos que la función no toma el valor $x = -3$, sin embargo tiene un comportamiento asintótico alrededor de dicho punto. Cuando se acerca por la derecha los valores son negativos y muy grandes, mientras los acercamientos por la izquierda producen valores positivos grandes. Por ejemplo $f(-3 + 10\wedge(-16)) = -\ 100079991719344 34.36$.

Como en ningún caso los acercamientos conducen a un número fijo, tenemos que concluir que el límite no existe.

Ejemplo 3: Encuentre el valor de

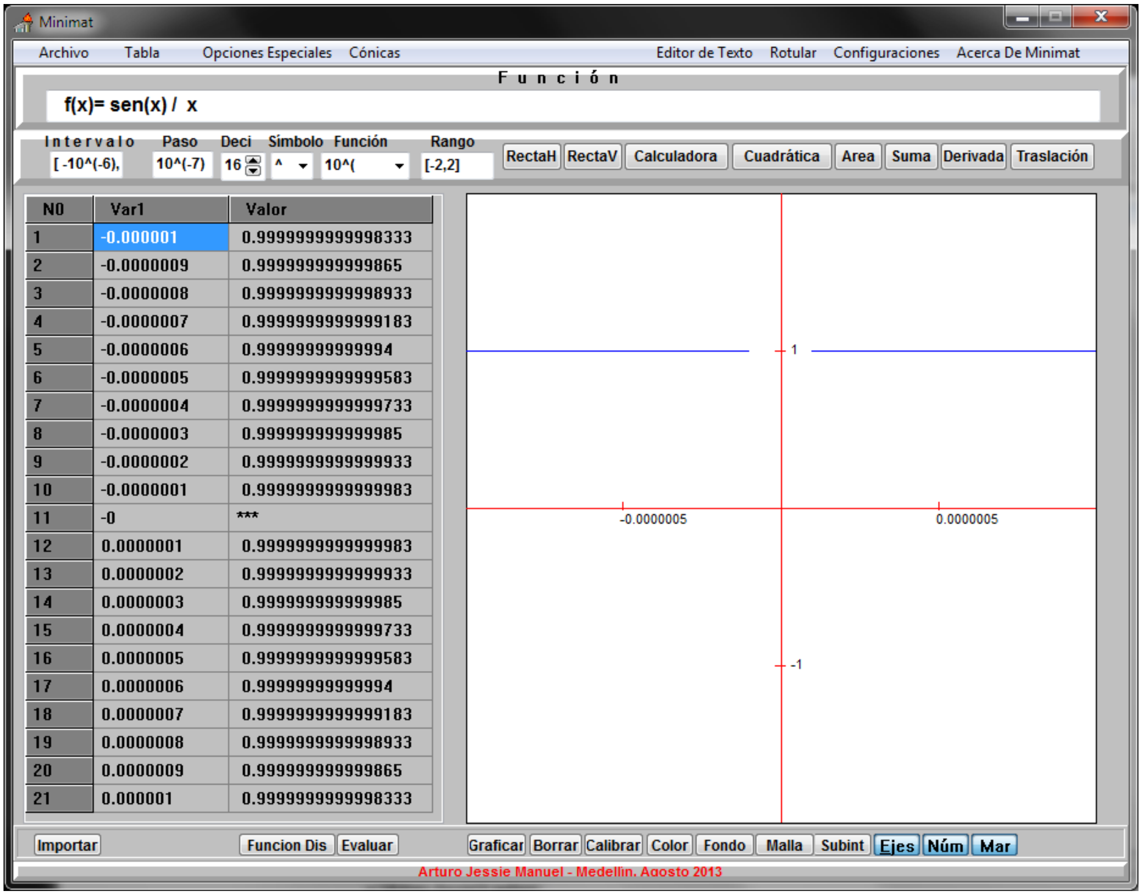
$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

Solución.

Definamos los parámetro necesarios para que **Minimat** genere la tabla de valores y la gráfica de la función en un intervalo pequeño que contiene al punto $k = 0$.

Intervalo= [-10^(-6), 10^(-6)] ; Paso = 10^(-7); Rango = [-2,2] ; Decimales= 16

Evaluamos y graficamos



Analicemos la parte central de la tabla de valores y la gráfica.

En este caso tenemos que la función no toma el valor $x = 0$, pero su comportamiento alrededor de dicho punto indica que tiende al valor fijo 0.9999999999. Además su gráfica es una recta horizontal. En conclusión diremos que el límite existe y es aproximadamente igual a

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \approx 0.9999999999$$

Formalmente al calcular $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$, se obtiene que el valor exacto

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Es importante anotar que si utilizamos los parámetros:

Intervalo= [-10^(-8), 10^(-8)] ; Paso = 10^(-9); Rango = [-2,2] y Decimales= 16.

Se obtiene una tabla con todos los valores iguales a 1, que corresponde al valor exacto del límite.

Es conveniente jugar con los parámentros antes de tomar una decisión respecto al valor aproximado de un límite en particular.

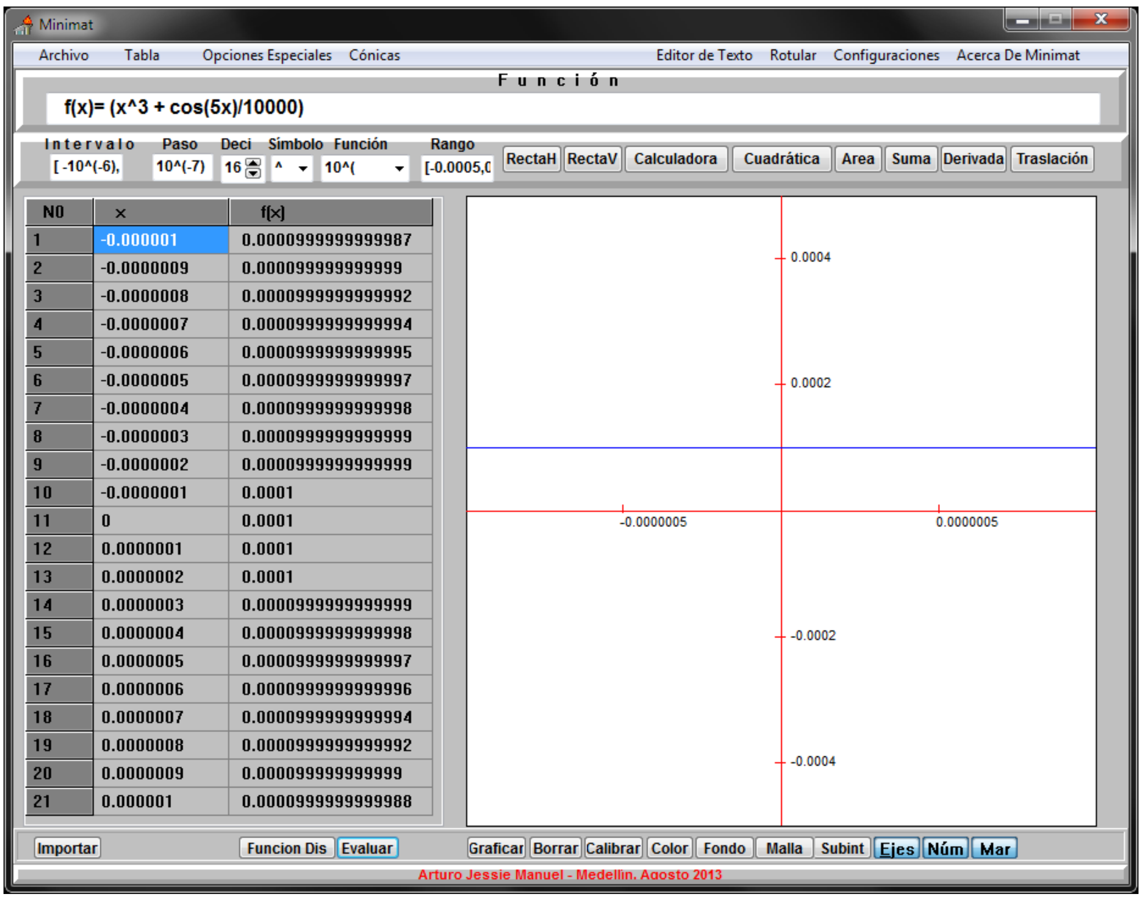
Ejemplo 4: Encuentre el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos(5x)}{10000} \right)$$

Solución.

Definamos los parámetro necesarios para que **Minimat** genere la tabla de valores y la gráfica de la función en un intervalo pequeño que contiene al punto $k = 0$.

Intervalo= [-10^(-6), 10^(-6)] ; Paso = 10^(-7); Rango = [-0.0005,0.0005]; Decimales= 16



N0	x	f(x)
1	-0.000001	0.0000999999999999987
2	-0.0000009	0.000099999999999
3	-0.0000008	0.0000999999999999992
4	-0.0000007	0.0000999999999999994
5	-0.0000006	0.0000999999999999995
6	-0.0000005	0.0000999999999999997
7	-0.0000004	0.0000999999999999998
8	-0.0000003	0.0000999999999999999
9	-0.0000002	0.0000999999999999999
10	-0.0000001	0.0001
11	0	0.0001
12	0.0000001	0.0001
13	0.0000002	0.0001
14	0.0000003	0.0000999999999999999
15	0.0000004	0.0000999999999999998
16	0.0000005	0.0000999999999999997
17	0.0000006	0.0000999999999999996
18	0.0000007	0.0000999999999999994
19	0.0000008	0.0000999999999999992
20	0.0000009	0.000099999999999
21	0.000001	0.0000999999999999988

Analicemos la parte central de la tabla de valores y la gráfica.

En este caso tenemos que la función toma el valor $x = 0$, pero su comportamiento alrededor de dicho punto indica que tiende al valor fijo 0.0001. Además su gráfica es una recta horizontal. En conclusión diremos que el límite existe y es aproximadamente igual a

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos(5x)}{10000}\right)\approx 0.0001$$

Formalmente al calcular $\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos(5x)}{10000}\right)$, se obtiene el valor exacto

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos(5x)}{10000}\right)=\frac{1}{10000}$$

Qué ocurre si realizamos los cálculos con un número de decimales, Deci= **14 ?**

Ejemplo 5: Encuentre el valor de

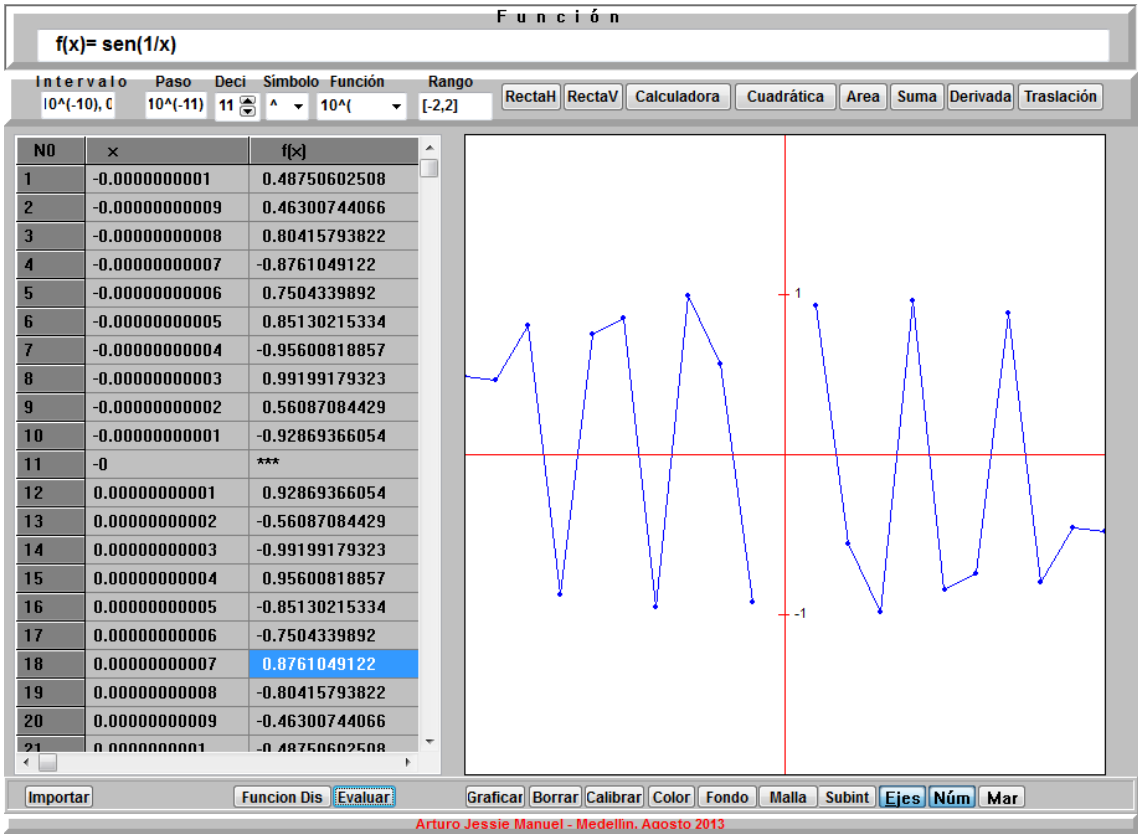
$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solución.

Definamos los parámetro necesarios para que **Minimat** genere la tabla de valores y la gráfica de la función en un intervalo pequeño que contiene al punto $k=0$.

Intervalo= [0-10^(-10), 0+10^(-10)] ; Paso = 10^(-11); Rango = [-2,2] ; Decimales= 11

Evaluamos y graficamos



N0	x	f(x)
1	-0.0000000001	0.48750602508
2	-0.00000000009	0.46300744066
3	-0.00000000008	0.80415793822
4	-0.00000000007	-0.8761049122
5	-0.00000000006	0.7504339892
6	-0.00000000005	0.85130215334
7	-0.00000000004	-0.95600818857
8	-0.00000000003	0.99199179323
9	-0.00000000002	0.56087084429
10	-0.00000000001	-0.92869366054
11	-0	***
12	0.00000000001	0.92869366054
13	0.00000000002	-0.56087084429
14	0.00000000003	-0.99199179323
15	0.00000000004	0.95600818857
16	0.00000000005	-0.85130215334
17	0.00000000006	-0.7504339892
18	0.00000000007	0.8761049122
19	0.00000000008	-0.80415793822
20	0.00000000009	-0.46300744066
21	0.0000000001	-0.48750602508

Analicemos La parte central de la tabla de valores y la gráfica.

Al estudiar los valores de la tabla y la gráfica vemos que la función no toma el valor $x = 0$. Sin embargo su comportamiento alrededor de dicho punto indica que los valores de $f(x)$ oscilan entre 1 y -1 cuando x se aproxima a 0. Además como los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo diremos que,

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{no existe}$$

Profesor

Arturo Jessie Manuel

Septiembre de 2013